ЛЕКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

В.Н. Берестовский

Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, berestov@ofim.oscsbras.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В.А. ТОПОНОГОВА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯХ

Задача В.А. Топоногова. *На замкнутой верхней полуплоскости декартовой плоскости (x, y) определена непрерывно дифференцируемая вещественная функция f, тождественно равная нулю на прямой $y = 0$, и всюду для f модуль частной производной по y не превосходит модуля частной производной по x. Доказать, что f равна нулю всюду.*

Положительное решение этой задачи и некоторые ее естественные обобщения были опубликованы в статье [1].

Теорема 1. *Пусть f — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на замкнутом полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, t \geqslant 0\}$, причем*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leqslant A \left\|\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right\|, \tag{1}$$

где A — некоторая неотрицательная постоянная, а $\|\cdot\|$ — стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Тогда для каждой точки $u^1 \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ существует точка $u^0 \in H \cap K_{u^1}$, где $H = \{(x,t) \in \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, t = 0\}$, $K_{u^1} := \mathbb{R}^{n+1}_+ \cap (u^1 - C)$, а

$$C = \left\{w \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|w\| \leqslant \sqrt{A^2+1}\,w_{n+1}\right\}$$

— острый замкнутый конус, такая, что $f(u^1) = f(u^0)$.

Из теоремы 1 непосредственно вытекают

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 1 *функция* f *тождественно равна постоянной* c *на* H, *то* f *равна* c *всюду.*

Следствие 2. *Задача В.А. Топоногова имеет положительное решение.*

Теорему 1 можно сформулировать так:

Теорема 2. *Если для каждой точки* $u \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ *существует ненулевой вектор* $v \in C$, *такой, что* $df(u)(v) = 0$, *то для каждой точки* $u^1 \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ *существует точка* $u^0 \in H \cap (u^1 - C)$, *такая, что* $f(u^1) = f(u^0)$.

Лоренцевым многообразием называется пара (M, g), где M — C^∞-многообразие размерности $n + 1 \geqslant 2$, а g — гладкое симметричное тензорное поле типа $(0, 2)$ (называемое *лоренцевой метрикой*), заданное на M так, что в каждой точке $p \in M$ тензор $g|_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ представляет собой невырожденное скалярное произведение с сигнатурой $(+, +, \ldots, +, -)$. Ненулевой вектор $v \in TM$ называется *непространственноподобным* (соответственно, *времениподобным, изотропным, пространственноподобным*), если $g(v, v) \leqslant 0$ (соответственно, < 0, $= 0$, > 0). Непрерывное векторное поле X на лоренцевом многообразии M называется *времениподобным*, если $g(X(p), X(p)) < 0$ для всех точек $p \in M$. Если лоренцево многообразие (M, g) допускает времениподобное векторное поле X, то многообразие (M, g) называют *ориентированным во времени посредством поля* X. Времениподобное векторное поле X разбивает все непространственноподобные векторы $v \in T_pM$, $p \in M$, на два непересекающихся класса — векторов, *направленных в будущее*: $g(X(p), v) < 0$, и векторов, *направленных в прошлое*: $g(X(p), v) > 0$.

Определение 1 [3]. *Пространством-временем* (M, g) *называется связное хаусдорфово* C^∞*-многообразие размерности не меньше двух со счетной базой окрестностей, лоренцевой метрикой* g *сигнатуры* $(+, +, \ldots, +, -)$ *и временно́й ориентацией.*

Непрерывная кусочно непрерывно дифференцируемая кривая (путь) $c = c(t)$, где $t \in [a, b]$ или $t \in (a, b)$, в лоренцевом многообразии (M, g) называется *непространственноподобной*, если $g(c'_l(t), c'_r(t)) \leqslant 0$ для каждой внутренней точки t области определения c, где $c'_l(t)$ (соответственно, $c'_r(t)$) обозначает левый (соответственно, правый) касательный вектор. Если при этом (M, g) — пространство-время, то кривая $c = c(t)$, где $t \in [a, b]$ или $t \in (a, b)$, *направлена в будущее* или *направлена в прошлое*, т. е. все (вообще говоря, односторонние) касательные векторы кривой c одновременно *направлены в будущее* или *направлены в прошлое* (но не то и другое вместе). *Причинное будущее* $J^+(L)$ (соответственно, *причинное прошлое* $J^-(L)$) подмножества L пространства-времени (M, g) определяется как множество всех точек $q \in M$, для которых существует направленная в будущее (соответственно, в прошлое) кривая $c = c(t), t \in [a, b]$, такая, что $c(a) \in L, c(b) = q$. Если $p \in M$, то будем использовать сокращенные обозначения $J^+(p)$ и $J^-(p)$ вместо $J^+(\{p\})$ и $J^-(\{p\})$.

Определение 2. *Пространство-время* (M, g) *называется глобально гиперболическим, если для любых точек* $p, q \in M$, *множество* $J^+(p) \cap J^-(q)$ *компактно относительно топологии многообразия* M.

Наиболее простой пример глобально гиперболического пространства-времени доставляет *пространство-время Минковского,* т. е. многообразие $M = \mathbb{R}^{n+1}, n+1 \geqslant 2$, с лоренцевой метрикой g, имеющей относительно канонических координат $(x_1, \ldots, x_n, t)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ постоянные компоненты g_{ij}, где

$$g_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j; \; g_{11} = \cdots = g_{nn} = 1, \; g_{(n+1)(n+1)} = -1. \quad (2)$$

Временна́я ориентация определяется векторным полем X с постоянными компонентами $(0, \ldots, 0, 1)$ относительно канонических координат в $\mathbb{R}^{n+1}$. В случае $A > 0$ теорема 2 допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема 3. *Пусть f — непрерывно дифференцируемая вещественная функция на замкнутом полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{+} = \{(x,t) = (x_1, \ldots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \geqslant 0\}$ пространства-времени Минковского (M, g), причем для каждой точки $u \in \mathbb{R}^{n+1}_{+}$ существует непространственноподобный вектор $v \in T_u M$ с условием $df(u)(v) = 0$. Тогда для каждой точки $u^1 \in \mathbb{R}^{n+1}_{+}$ существует точка $u^0 \in H \cap J^-(u^1)$, такая, что $f(u^1) = f(u^0)$.*

Определение 3. *Поверхностью Коши в пространстве-времени (M, g) размерности $n+1$ будем называть замкнутое подмножество $S \subset M$, являющееся n-мерным топологическим многообразием, которое каждая непродолжаемая непространственноподобная кривая в (M, g) вида $c = c(t)$, $-\infty < a < t < b < +\infty$, пересекает ровно в одной точке.*

Заметим, что гиперповерхность H из теоремы 3 доставляет пример поверхности Коши в пространстве-времени Минковского. Если S — произвольная поверхность Коши в пространстве-времени (M, g), то $M = J^+(S) \cup J^-(S)$.

Теорема 4 [4], [2]. *Для глобально гиперболического пространства-времени* (M, g) *существует гомеоморфизм* $\phi : M \approx \approx S \times \mathbb{R}$, *такой, что* $\phi^{-1}(S \times \{t\})$ — *поверхность Коши в* (M, g) *для каждого* $t \in \mathbb{R}$.

Следующая теорема обобщает теорему 3.

Теорема 5. *Пусть* f — *непрерывно дифференцируемая вещественная функция на глобально гиперболическом пространстве-времени* (M, g). *При этом для каждой точки* $u \in M$ *существует непространственноподобный вектор* $v \in T_u M$ *с условием* $df(u)(v) = 0$. *Тогда для каждой поверхности Коши* S *в* (M, g) *и каждой точки* u^1 *в* $J^+(S)$ (*соответственно,* $J^-(S)$) *существует точка* $u^0 \in S \cap J^-(u^1)$ (*соответственно,* $u^0 \in S \cap J^+(u^1)$), *такая, что* $f(u^1) = f(u^0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берестовский В.Н. *Об одной задаче В.А. Топоногова* // Матем. труды. - 2010. - Т. 13. - № 1. - С. 15–22.

2. Хокинг С., Эллис Дж. *Крупномасштабная структура пространства-времени.* - М.: Мир, 1977. - 432 с.

3. Бим Дж., Эрлих П. *Глобальная лоренцева геометрия.* - М.: Мир, 1985. - 400 с.

4. Geroch R.P. *Domain of dependence* // J. Math. Phys. - 1970. - V. 11. - P. 437–449.